第 3 节 四个常见条件的翻译（★★★）

内容提要

本节归纳 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 这类函数的图象性质有关考题中常见的四个条件的翻译方法.

1．单调区间：从左到右，最大值点到相邻最小值点为减区间，最小值点到相邻最大值点为增区间. 当条件给出在某区间单调时，则该区间不超过半个周期.

2．函数值相等：一个周期内（若恰好为一个周期，则结论不一定成立），两个点的函数值相等，则它们中间必为对称轴；如图 1 中同周期内的 A，B 两点处函数值相等，则中间为对称轴；又如同周期内的 B，C 两点处函数值相等，中间也为对称轴；A，C 之间恰好为一个周期，它们的中间不是对称轴；

3．函数值相反：半个周期内（不包括恰好为半个周期）或同一段单调区间上，两个点的函数值相反，则它们中点必为对称中心. 如图 2 中的 D，E 两点在半个周期内（也在同一段单调区间上），函数值相反，所以它们的中点 F 为对称中心；G 和 H 之间恰好为半个周期（不在同一段单调区间上），它们的中点不是对称中心.

4．隐含的最值点：若 $f(x)\le f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值；若 $f(x)\ge f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值；若 $f(x)\le|f(x_0)|$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最值（最大值、最小值均可）.

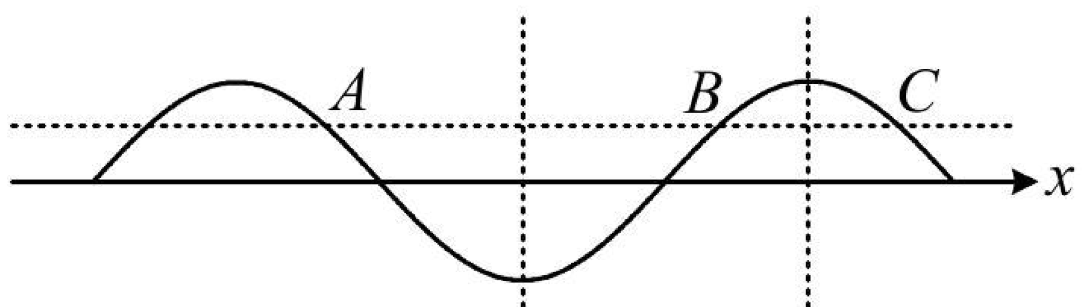


图1

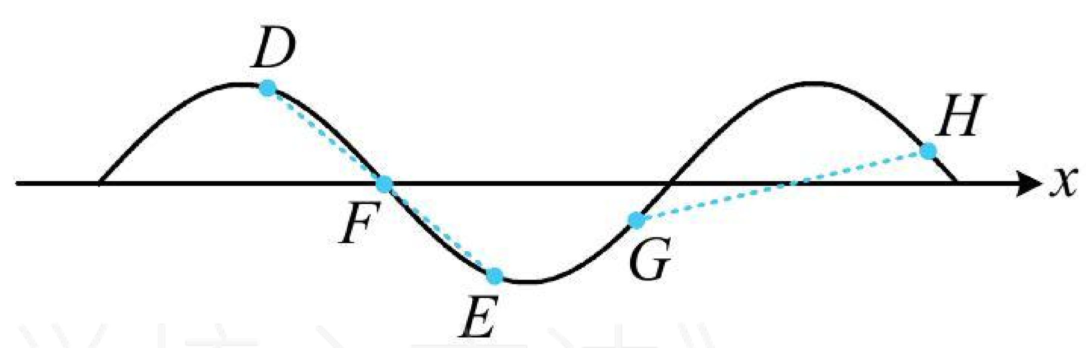


图2

典型例题

【例 1】若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{7\pi}{12})$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调，且 $f(-\frac{\pi}{3})=f(\frac{\pi}{6})$，则正数 ω 的值为_____.

解析：给出了在某区间单调的条件，根据内容提要 1，可由此限定周期 T 的范围，进而得到 ω 的范围，

因为 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调，所以 $\frac{T}{2}\ge\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，从而 $T=\frac{2\pi}{\omega}\ge\pi$，故 $0<\omega\le 2$ ①，

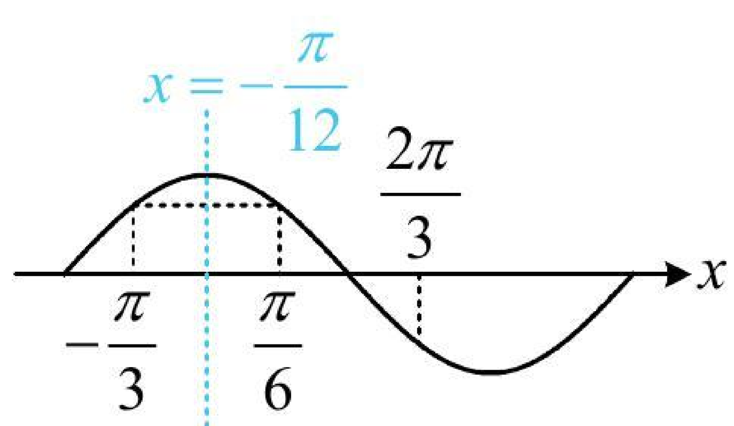
另一条件 $f(-\frac{\pi}{3})=f(\frac{\pi}{6})$ 涉及函数值相等，尝试用它分析对称轴，先看看它们是否在一个周期内，

由 $T\ge\pi$ 知 $-\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{6}$ 在同一个周期内，又 $f(-\frac{\pi}{3})=f(\frac{\pi}{6})$，所以它们的中间 $x=-\frac{\pi}{12}$ 必为对称轴，如图，

所以 $-\frac{\pi}{12}\omega+\frac{7\pi}{12}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，从而 $\omega=1-12k(k\in\mathbf{Z})$，

结合①可得 k 只能取 0，故 $\omega=1$.

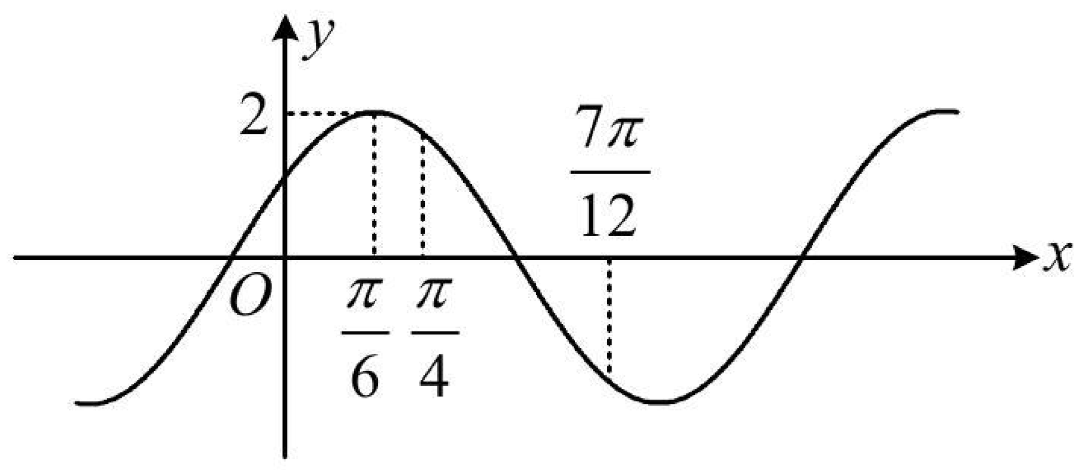
答案：1



【反思】对于 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 这类函数，①若 $f(x)$ 在某区间单调，则该区间的宽度不超过半个周期；②若 $f(x_1)=f(x_2)$，且 x_1，x_2 在同一周期内（不恰好为一个周期），则可推断 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 为对称轴.

【例 2】已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的部分图象如图所示，且 $f(\dfrac{\pi}{4})+f(\dfrac{7\pi}{12})=0$，则 $f(\dfrac{\pi}{12})=$（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）$\sqrt{3}$



解析：先观察最值点、零点这些关键点，图中只标注了 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 处为最大值点，仅由此无法求出周期，但可根据 $f(\dfrac{\pi}{4})+f(\dfrac{7\pi}{12})=0$ 推断出 $\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\dfrac{7\pi}{12}$ 的中间应为对称中心，从而求得周期，

由图可知 $\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\dfrac{7\pi}{12}$ 在同一段单调区间上，又 $f(\dfrac{\pi}{4})+f(\dfrac{7\pi}{12})=0$，所以 $(\dfrac{5\pi}{12},0)$ 是图象的一个对称中心，

从而 $\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{T}{4}$，故 $T=\pi$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，还需求 φ，可代 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 这个最大值点，

又 $f(\dfrac{\pi}{6})=2\sin(2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi)=2$，所以 $\sin(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=1$，从而 $\dfrac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(x)=2\sin(2x+2k\pi+\dfrac{\pi}{6})=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$，故 $f(\dfrac{\pi}{12})=2\sin(2\times\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6})=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

答案：D

【反思】看到 $f(x_1)+f(x_2)=0$，先分析 x_1，x_2 是否在同一段单调区间上或同在半个周期内，若是，则可推断 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 处为对称中心.

【例 3】设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 满足 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，$f(\dfrac{\pi}{6})+f(\dfrac{\pi}{3})=0$，且 $f(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3})$ 上单调，则 $\omega=$______.

解析：由题意，$f(0)=\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，$f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})$，

再求 ω，可先通过代点把 ω 表示出来，但条件中已无点可代，怎么办呢？如图，$f(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3})$ 上单调，结合 $f(\dfrac{\pi}{6})+f(\dfrac{\pi}{3})=0$，由内容提要 3 可得 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处为对称中心，函数值为 0，点就有了，

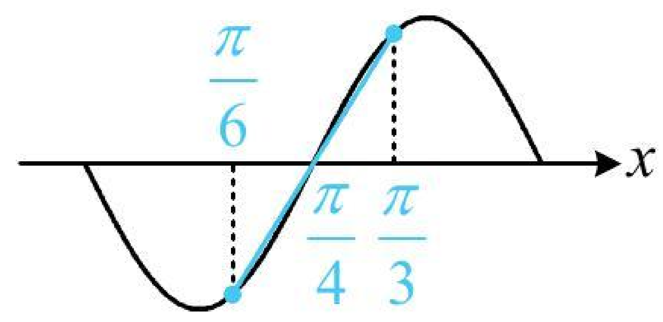
由图可知，$f(\dfrac{\pi}{4})=\sin(\dfrac{\pi}{4}\omega+\dfrac{\pi}{6})=0$，所以 $\dfrac{\pi}{4}\omega+\dfrac{\pi}{6}=k\pi$，故 $\omega=4k-\dfrac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

我们发现只要 k 取正整数，就能满足 $\omega>0$，那 k 能取所有的正整数吗？其实不能，因为 $f(\frac{\pi}{4})=0$ 不能保证 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 上单调，所以还得把这个条件翻译出来，在 $f(\frac{\pi}{4})=0$ 的情况下，只要区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 的宽度不超过半个周期，那么 $f(x)$ 在该区间就单调了，

所以 $\frac{T}{2}\ge\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，故 $T\ge\frac{\pi}{3}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}\ge\frac{\pi}{3}$，所以 $\omega\le 6$，

又 $\omega>0$，所以 $0<\omega\le 6$，从而 k 只能取 1，故 $\omega=\frac{10}{3}$.

答案： $\frac{10}{3}$



强化训练

1.（★★）已知 $f(x)=\sin(\frac{3}{4}x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$，若 $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{\pi}{2})$，则 $\varphi=$_____.

2.（2022・四川绵阳模拟・★★）若 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的图象与直线 $y=m$ 的三个相邻交点的横坐标分别是 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，则 $\omega=$_____.

3.（2023・安徽模拟・★★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega$ 为正整数，$0<\varphi<\pi)$ 在区间 $(\frac{\pi}{4},\pi)$ 上单调，且 $f(\pi)=f(\frac{3\pi}{2})$，则 $\varphi=$（　　）

（A）$\frac{\pi}{6}$　（B）$\frac{\pi}{4}$　（C）$\frac{\pi}{3}$　（D）$\frac{2\pi}{3}$

4．（★★★★）设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，$f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})=-f(\frac{\pi}{6})$，若将函数 $f(x)$ 图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$_____.